CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 14 JANVIER 2020

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Questions de cours (4 points)

1. Pour toute suite $\gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, le théorème de Herglotz garantit l'équivalence entre
   (a) γ est symétrique de type positif.
   (b) γ est la suite des coefficients de Fourier d'une mesure finie ν sur $[-\pi, \pi]$, i.e.
$$\forall h \in \mathbb{Z}, \qquad \gamma(h) \quad = \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{iuh}\, \nu(\mathrm{d}u).$$

2. En notant $Y = F_\alpha(X)$, on a par définition, presque-sûrement et dans L^2,
$$Y_t \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k X_{t-k}.$$
   Par continuité dans L^2 de la covariance, on en déduit que pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned}
\gamma_Y(h) \quad &= \quad \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t+h}\right) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k X_{t-k}, \sum_{\ell=-n}^{n} \alpha_\ell X_{t+h-\ell}\right) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\ell=-n}^{n} \alpha_k \alpha_\ell \gamma_X\left(h+k-\ell\right) \\
&= \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_\ell \gamma_X\left(h+k-\ell\right).
\end{aligned}$$
   La dernière égalité découle du fait que la double série est absolument sommable, puisque $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que γ_X est bornée (par $\gamma_X(0)$).

Par définition de la mesure spectrale, il vient

$$\begin{aligned}\gamma_Y(h) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \alpha_k\alpha_\ell \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+k-\ell)u}\nu_X(\mathrm{d}u) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k e^{iku}\right)\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\alpha_\ell e^{-i\ell u}\right)\mathrm{d}u. \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu}\left|P_\alpha(e^{iu})\right|^2 \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini à la seconde ligne est justifiée par le fait que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left|\alpha_k\alpha_\ell e^{i(h+k-\ell)u}\right|\nu_X(\mathrm{d}u) \quad = \quad \|\alpha\|_{\ell^1}^2\gamma_X(0) < \infty.$$

Par unicité de la représentation spectrale, on en déduit que $\nu_Y(\mathrm{d}u) = |P_\alpha(e^{iu})|^2\,\mathrm{d}u$.

Exercice (6 points)

1. Il s'agit d'une équation ARMA(2,1).
2. Les polynômes associés sont

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= 1+\frac{5}{3}z-\frac{2}{3}z^2 = (1+2z)\left(1-\frac{z}{3}\right) \\ \Theta(z) &= 1+2z.\end{aligned}$$

   Le polynôme Φ n'a pas de racines de module 1, donc l'équation admet une unique solution stationnaire X.

3. On sait que la solution s'écrit $X = F_\alpha(Z)$, avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ caractérisé par son développement en série de puissances : pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k z^k = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = 1-\frac{z}{3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}.$$

   Par unicité du développement en série de puissance, on en déduit que

$$\alpha_k = \begin{cases}\frac{1}{3^k} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   Ainsi, le processus X est causal.

4. Comme Z est un bruit blanc standard, on a $\mu_X = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+|h|} \\ &= \frac{1}{3^{|h|}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k} \\ &= \frac{9}{8 \times 3^{|h|}}.\end{aligned}$$

5. Comme $X = F_\alpha(Z)$ est un processus linéaire, on sait que f_X existe et vaut

$$f_X(u) \;=\; \left|P_\alpha(e^{iu})\right|^2 f_Z(u) \;=\; \frac{1}{2\pi\left|1 - \frac{e^{iu}}{3}\right|^2} \;=\; \frac{9}{4\pi\,(5 - 3\cos u)}.$$

6. Le processus X explicité à la question 2 est solution de l'équation AR(1) causale

$$X_t \;=\; Z_t + \frac{1}{3} X_{t-1}.$$

D'après le cours, on en déduit immédiatement que pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}\,(X_t, H_{t-1,p}) &= \frac{1}{3} X_{t-1} \\ \sigma_p &= \|Z_t\|_{L^2} \;=\; 1.\end{aligned}$$

Problème (10 points)

A1. Pour une v.a.r. gaussienne, on a toujours

$$\mathbb{E}\left[e^W\right] \;=\; e^{\mathbb{E}[W] + \frac{\mathrm{Var(W)}}{2}}.$$

En particulier, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}\left[Y_t\right] \;=\; e^{\mu_X(t) + \frac{\gamma_X(t,t)}{2}}.$$

D'autre part, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, on a $Y_t Y_{t+h} = e^{X_t + X_{t+h}}$, avec $X_t + X_{t+h}$ gaussienne car X est un processus gaussien. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_t Y_{t+h}\right] &= e^{\mu_X(t) + \mu_X(t+h) + \frac{\gamma_X(t,t) + \gamma_X(t+h,t+h) + 2\gamma_X(t,t+h)}{2}} \\ &= \mathbb{E}[Y_t]\mathbb{E}[Y_{t+h}] e^{\gamma_X(t,t+h)}\end{aligned}$$

On en déduit que Y est du second ordre et que

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= e^{\mu_X(t) + \frac{\gamma_X(t,t)}{2}} \\ \gamma_Y(t, t+h) &= \mu_Y(t)\mu_Y(t+h)\left(e^{\gamma_X(t,t+h)} - 1\right).\end{aligned}$$

A2. Si Y est stationnaire, alors les deux quantités ci-dessus ne dépendent pas de t. En particulier, on peut remplacer $\mu_Y(t)\mu_Y(t+h)$ par $\mu_Y(0)\mu_Y(h)$ dans la seconde équation, et on en déduit que $\gamma_X(t,t+h)$ ne dépend pas de t. Dès lors, on peut remplacer $\gamma_X(t,t)$ par $\gamma_X(0,0)$ dans la première équation pour obtenir que $\mu_X(t)$ ne dépend pas de t. On conclut que X est stationnaire. Réciproquement, si X est stationnaire alors $\mu_X(t)$ et $\mu_X(t,t+h)$ ne dépendent pas de t, et l'on déduit de la première équation que $\mu_Y(t)$ ne dépend pas de t, puis de la deuxième équation que $\gamma_Y(t,t+h)$ ne dépend pas de t. Ainsi, Y est bien stationnaire.

A3. Y est un bruit blanc faible si et seulement s'il est stationnaire avec $\mu_Y(h)=0$ pour $h\neq 0$. D'après la question précédente, cela revient à demander que X soit stationnaire avec pour tout $h\neq 0$,

$$e^{2\mu_X+\gamma_X(0)}\left(e^{\gamma_X(h)}-1\right) \;=\; 0.$$

Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si $\gamma_X(h)=0$ pour tout $h\neq 0$, c'est-à-dire que X est un bruit blanc faible. Mais X est un processus gaussien, donc c'est un bruit blanc faible si et seulement si c'est un bruit blanc fort, c'est-à-dire si les variables $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont i.i.d..

B1. Comme X est stationnaire et centré, la question A1 donne

$$\begin{aligned}\mu_Y &= e^{\frac{\gamma_X(0)}{2}}\\ \gamma_Y(h) &= e^{\gamma_X(0)}\left(e^{\gamma_X(h)}-1\right).\end{aligned}$$

B2. Si $\gamma_X(0)>0$ et $\gamma_X(h)\to 0$ lorsque $h\to\infty$, alors on voit que $\gamma_Y(0)>0$ et que $\gamma_Y(h)\to 0$ lorsque $h\to\infty$. D'après le cours, cela garantit que la matrice de covariance Γ_p du vecteur $(Y_1,\ldots,Y_p)$ est définie positive pour tout $p\geq 1$. Ainsi, pour tout vecteur $\lambda\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$, on a

$$\mathrm{Var}\left(\lambda_1Y_1+\cdots+\lambda_pY_p\right) \;=\; \lambda\Gamma_p\lambda^\top \;>\; 0.$$

B3. Si $(\gamma_X(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors lorsque $h\pm\infty$, on a $\gamma_X(h)\to 0$, et donc

$$|\gamma_Y(h)| = e^{\gamma_X(0)}\left|e^{\gamma_X(h)}-1\right| \;=\; e^{\gamma_X(0)}|\gamma_X(h)|\left(1+o(1)\right).$$

Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la suite $(\gamma_Y(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ est elle aussi sommable, ce qui assure l'existence de la densité spectrale :

$$f_Y(u) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_Y(h)e^{-ihu}.$$

C1. Il s'agit d'une équation de la forme $X_t=Z_t+\varphi X_{t-1}$ où Z est un bruit blanc standard et $\varphi=\frac{1}{2}\notin\{-1,1\}$. D'après le cours, il existe une unique solution stationnaire, donnée par

$$X_t \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}Z_{t-k}.$$

C2. D'après le cours, la série ci-dessus est convergente p.-s. et dans L^2. En particulier, pour tout $d \geq 1$, tout $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$ et tout $(\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{d} \theta_i X_{t_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{d} \theta_i \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} Z_{t_i-k},$$

p.-s. et dans L^2. Ainsi $\sum_{i=1}^{d} \theta_i X_{t_i}$ est une v.a.r. gaussienne, en tant que limite dans L^2 d'une suite de v.a.r. gaussiennes (on utilise ici le fait que Z est un processus gaussien). Ainsi, X est un processus gaussien. D'après le cours sur AR(1), on a

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ \gamma_X(h) &= \frac{\frac{1}{2^{|h|}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3 \times 2^{|h|}} \end{aligned}$$

C3. On pose $Y_t = e^{X_t}$ et $B_t = e^{Z_t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Comme Z est un bruit blanc gaussien et X un processus gaussien stationnaire, la partie A nous assure que B est un bruit blanc, et que Y est un processus du second ordre stationnaire. Il est clair que B, Y sont à valeurs positives, et l'équation $X_t = Z_t + X_{t-1}/2$ devient

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad Y_t = B_t \sqrt{Y_{t-1}}.$$

C4. D'après la question C2, on a $\gamma_X(h) \to 0$ lorsque $h \to \pm\infty$. D'après la question B3, on en déduit que le processus Y admet une densité spectrale.